



Encuentros con un experto

Javier Rodríguez y Joaquín Martí

Director Técnico y Director

Principia

Incremento de Tiempo Estable y
Escalado de Masa en Análisis Explícitos

23 de noviembre de 2021

Un serie de seminarios organizados por NAFEMS Iberia



Índice

1. Introducción
2. Estabilidad de la integración explícita
3. Escalado de masa
4. Ejemplo: fallo de una cimentación de aerogenerador
5. Conclusiones y recomendaciones

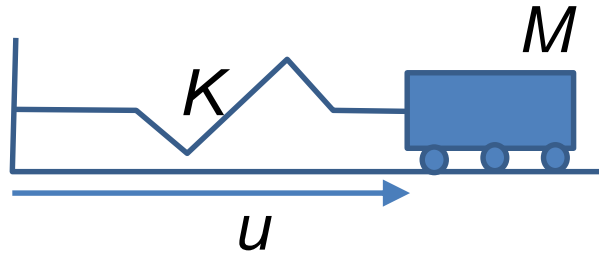
1. Introducción

- El *método de los elementos finitos* describe la solución de un problema físico mediante un conjunto discreto de variables; en problemas mecánicos, habitualmente a partir de los desplazamientos *nodales* (variables *primarias*).
- El método *converge* a la solución exacta cuando los errores disminuyen al reducir el paso de integración temporal y el tamaño de los elementos (*consistencia*).
- Además, puede requerirse una relación entre dichas discretizaciones (*estabilidad condicional*) para que la solución no diverja exponencialmente.

- La integración implícita de las ecuaciones de la dinámica generalmente produce esquemas *incondicionalmente estables*, pero no ocurre así con los algoritmos *explícitos*.
- Esto puede tener consecuencias importantes en los tiempos de computación de la simulación.

2. Estabilidad de la integración explícita

- Supongamos un problema unidimensional con una masa M unida a un extremo de muelle de constante elástica K que tiene fijo el otro extremo.



- La regla de integración explícita por diferencias centrales de la aceleración y de la velocidad resulta

$$\dot{u}_{i+1/2} = \dot{u}_{i-1/2} + \Delta t \ddot{u}_i \quad \text{n.º de incremento}$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t \dot{u}_{i+1/2}$$

- La ecuación de la dinámica $M\ddot{u}_i = F_i$, con $F_i = Ku_i$, queda discretizada como

$$u_{i+1} - \left[2 - \frac{K}{M} (\Delta t)^2 \right] u_i + u_{i-1} = 0$$

- Se trata de una recurrencia lineal que tiene soluciones básicas de la forma $u_i = \alpha^i$ donde

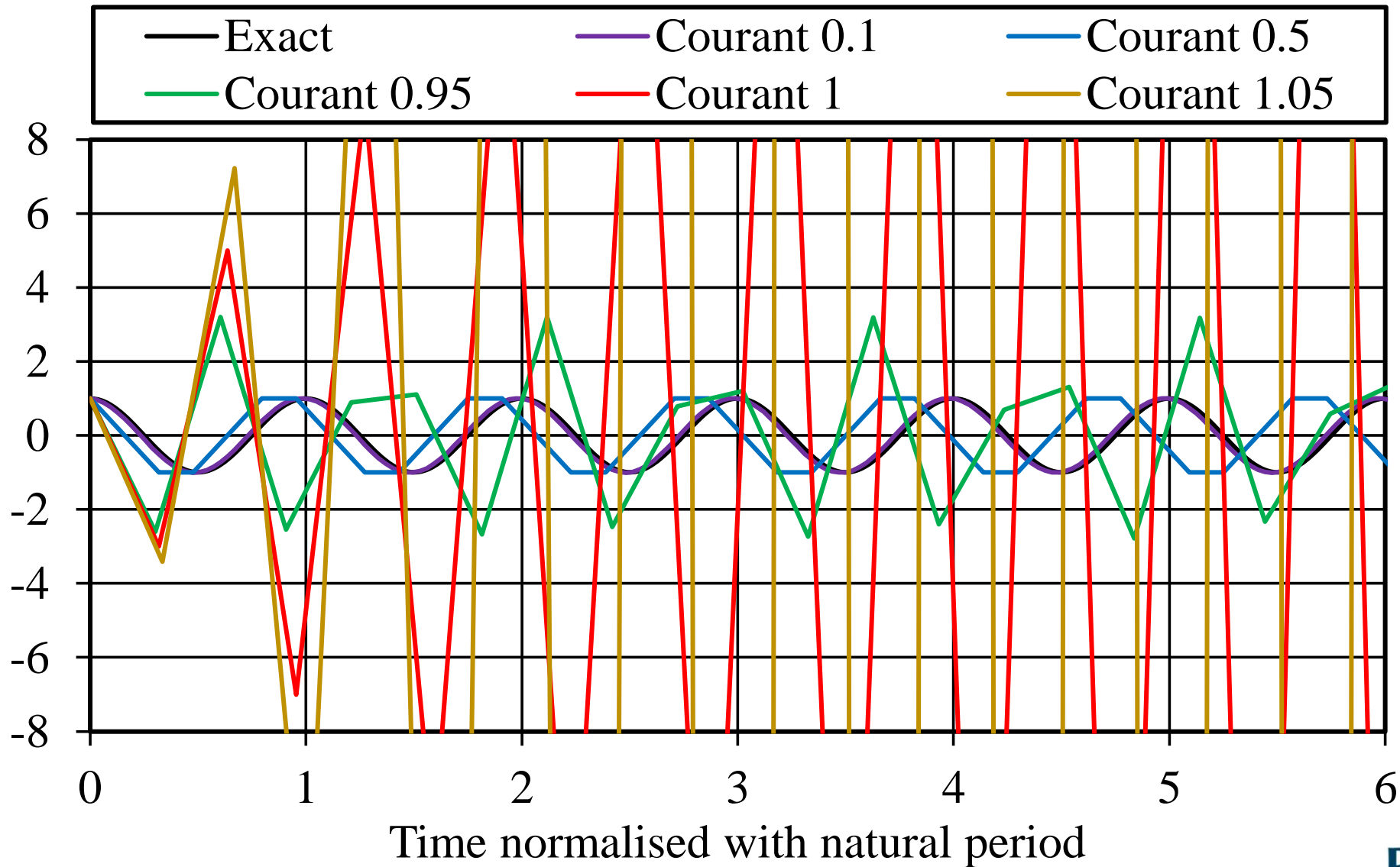
$$\alpha^2 - \left[2 - \frac{K}{M} (\Delta t)^2 \right] \alpha + 1 = 0$$

- Para que la solución sea estable el módulo de α (número complejo) debe ser menor que 1. Operando, esto implica

$$\Delta t \leq 2 \sqrt{\frac{M}{K}} \quad \longrightarrow \quad \Delta t \leq \Delta t_{\text{crit}} = \frac{2}{\omega}$$

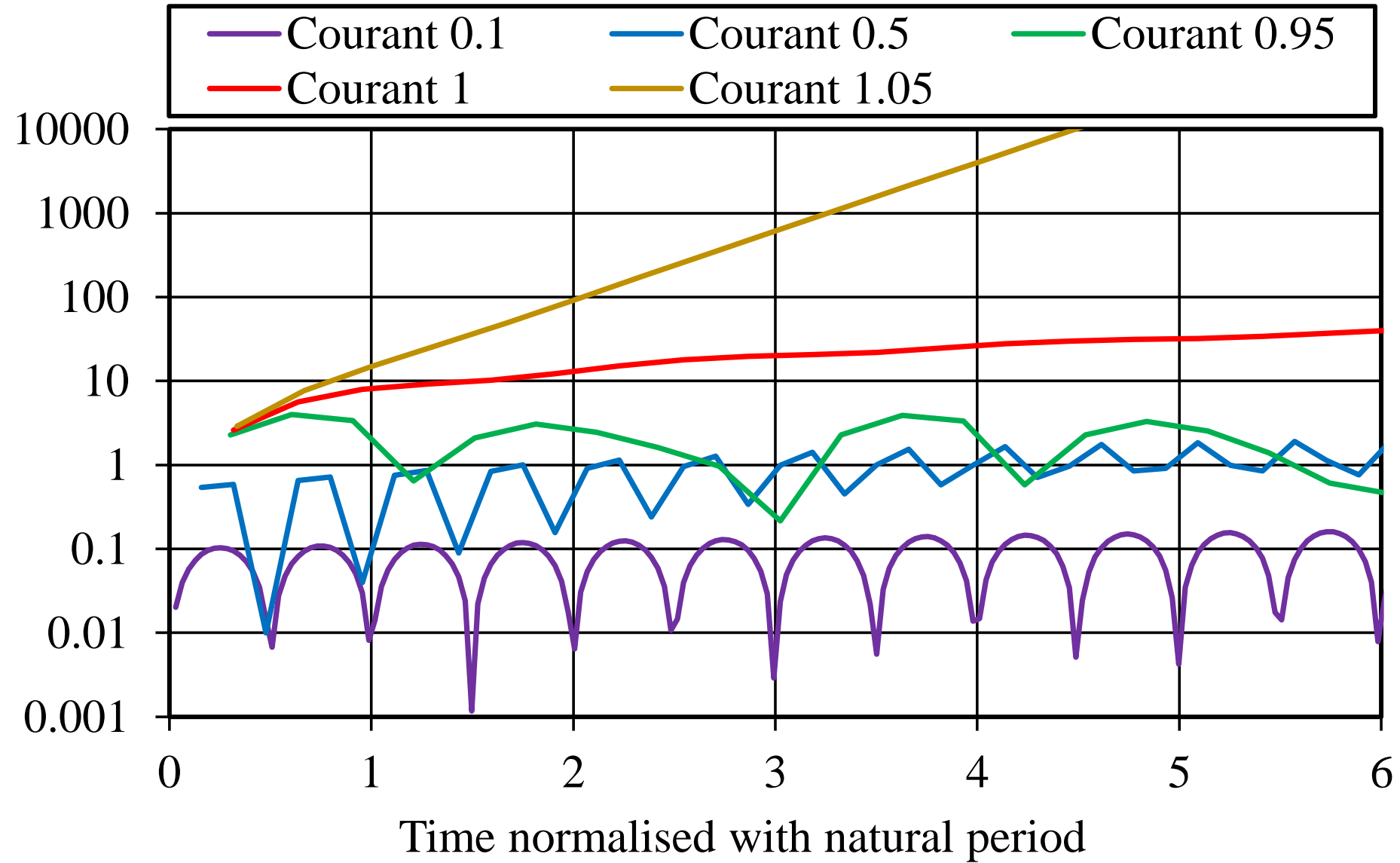
- Cuando tiene lugar la igualdad, tras desplazamientos consecutivos 1 y -1 la sucesión de valores sería 1, -1, 1, -1... Cuando el incremento de tiempo es mayor, entonces la solución oscila con amplitudes crecientes, aumentando la energía del sistema (no es físico).

Displ. normalised with initial value



$$\Delta t / \Delta t_{crit}$$

Error normalised with initial displ.



- Cuando hay amortiguamiento la ecuación de la dinámica es

$$\ddot{u}_i = - \left\{ K u_i + C \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} \right\} / M$$

- La recurrencia ahora resulta

$$u_{i+1} - \left[2 - \frac{K}{M} (\Delta t)^2 - \frac{C}{M} \Delta t \right] u_i + \left(1 + \frac{C}{M} \Delta t \right) u_{i-1} = 0$$

- El incremento de tiempo crítico puede obtenerse fácilmente de manera que la sucesión 1, -1, 1... sea solución:

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{crit}} = \frac{2}{\omega} \left(\sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right) \quad \xi = C / (2M\omega)$$

fracción de amortiguamiento crítico

- El coeficiente de rigidez del amortiguamiento de Rayleigh puede afectar mucho al paso de tiempo.

- Se pueden hacer consideraciones similares cuando hay múltiples grados de libertad (la matriz de masa es diagonal).
- El análisis espectral produce la misma ecuación del criterio de estabilidad, introduciendo la máxima frecuencia natural del sistema discretizado.
- El error asociado al paso de tiempo no suele ser motivo de preocupación ya que las frecuencias de interés de las estructuras suelen ser órdenes de magnitud más pequeñas que las máximas del sistema discretizado.

- Resolver el máximo autovalor del sistema es muy costoso, y por tanto se llevan a cabo estimaciones basadas en el tamaño de los elementos y en la velocidad de propagación de ondas,

$$\Delta t \propto \frac{L_{\min}}{c}$$

tamaño característico que depende de la geometría y formulación del elemento

$\sqrt{E/\rho}$ en el caso uniaxial

- El paso de integración viene condicionado por el tamaño de elemento más pequeño. Esto hace que habitualmente las mallas para procedimientos explícitos sean más uniformes que para los implícitos.

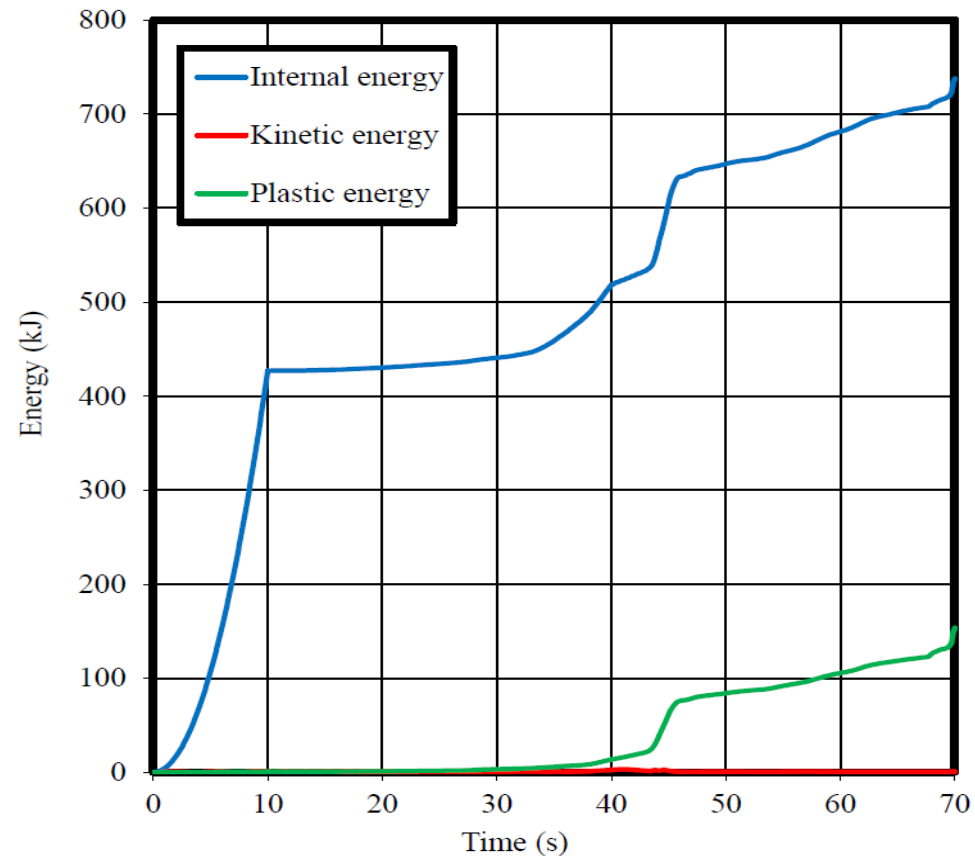
3. Escalado de masa

- Por ejemplo, en una estructura de acero con elementos de 5 mm, el incremento de tiempo es del orden de $1 \mu\text{s}$. Si el tiempo de interés fuese 0,1 s, el número total de incrementos sería de unos 100.000.
- La integración explícita no es conveniente solo para problemas altamente dinámicos como de impacto, colisiones o de propagación de ondas de choque. También puede interesar para problemas cuasiestáticos muy no lineales, donde la convergencia es difícil y requeriría técnicas artificiales que afectan a la física.

- Interesa aumentar el paso de tiempo para cubrir el período de interés en el menor número de incrementos, sin alterar significativamente la física.
- Si una carga se aplica en 100 s en el ejemplo anterior, se requerirían 100 millones de incrementos, aunque la respuesta sea suave cuasiestática.

- El *escalado de masa* consiste en incrementar artificialmente la densidad para reducir la velocidad de propagación.
- Ventajas respecto a acelerar artificialmente el proceso:
 - se puede aplicar heterogéneamente en la malla; y
 - permite mantener la misma definición de material para comportamientos dependientes del tiempo (por ejemplo, de la velocidad de deformación).

- En problemas cuasiestáticos se debe comprobar que la energía cinética se mantiene despreciable respecto a la interna.



- En problemas fuertemente dinámicos el escalado de masa debe utilizarse con extrema precaución, tratando de que la masa no se vea significativamente aumentada y haciendo análisis de sensibilidad.

- En problemas explícitos termomecánicos acoplados:

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta l)^2}{2\alpha} \quad \alpha = k/(\rho c)$$

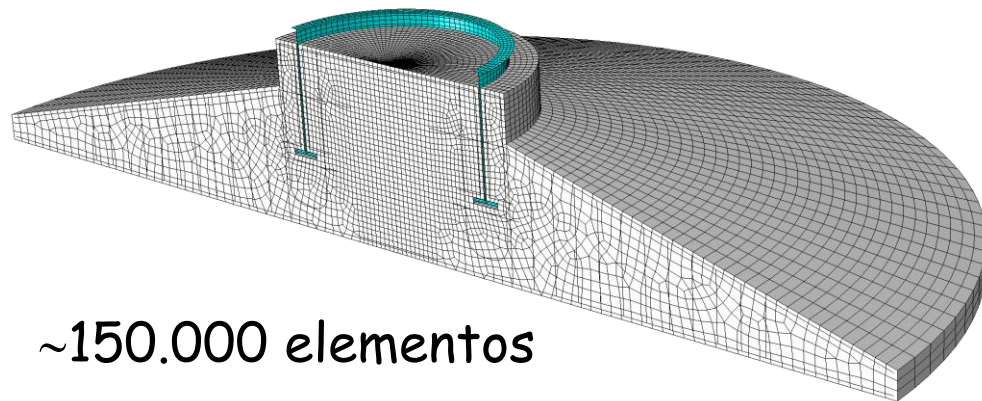
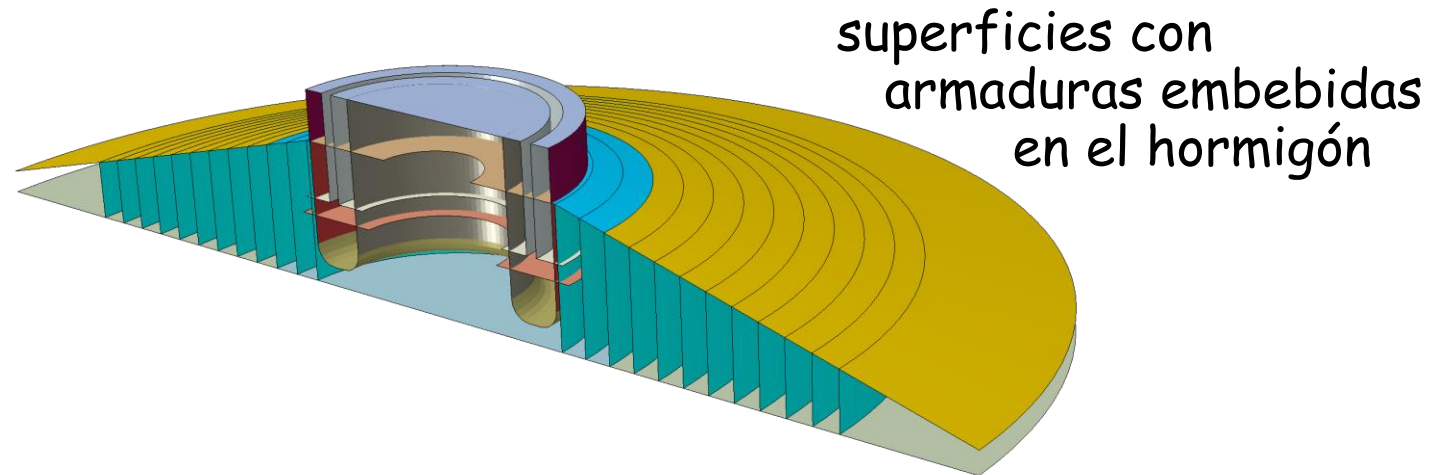
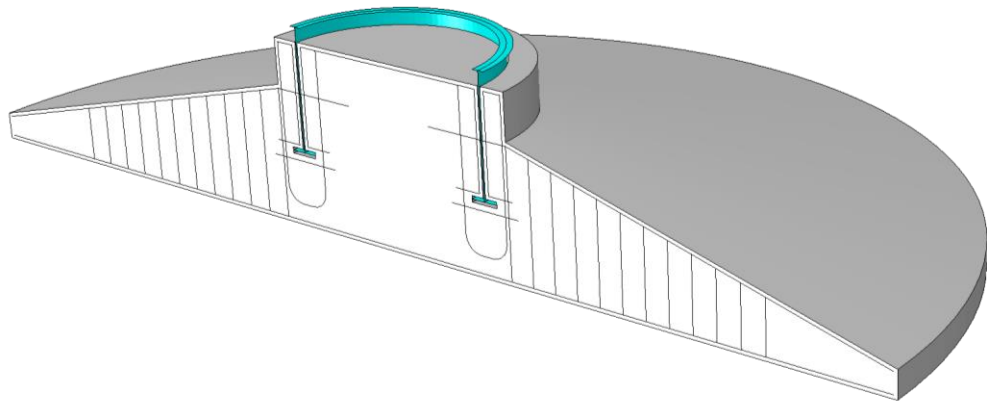
Se comenta en detalle en un post de www.linkedin.com/in/javier-rodriguezsoler

Generalmente la estabilidad viene condicionada por la respuesta mecánica.

- El escalado de masa solo afecta a los términos inerciales (tampoco a las cargas gravitatorias).

4. Ejemplo

- Análisis de la cimentación de un aerogenerador



~150.000 elementos

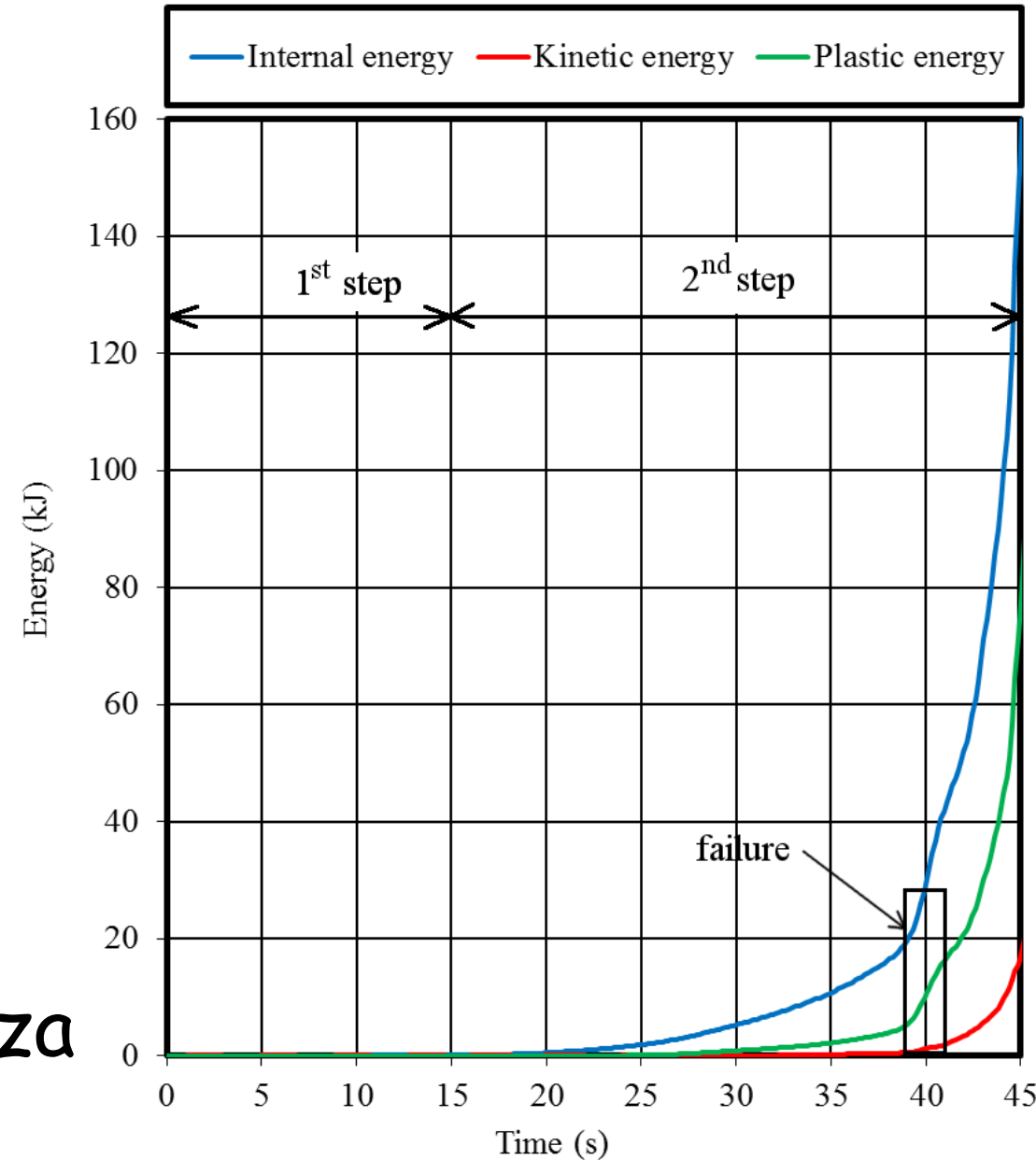
~ 500.000 grados de libertad

Para este tipo de problemas es conveniente la integración explícita debido a las no linealidades del problema y a que facilita la progresión de la solución una vez se desencadena el fallo de la estructura.

- En una primera fase de la simulación de 15 s se introducen suavemente las cargas gravitatorias y después se aplican las cargas externas en otros 30 s.
- El paso de integración inicial es de $0,65 \mu\text{s}$. Esto conllevaría unos 70 millones de incrementos.

- Teniendo en cuenta que el problema es cuasiestático hasta el fallo, se pueden escalar las densidades para aumentar el paso a 0,1 ms, de manera que el número de incrementos es de unos 450.000 (150 veces más rápido).
- La masa es unas 25 veces mayor (había mucha dispersión en el paso de tiempo requerido), y es admisible mientras se mantenga el comportamiento cuasiestático.

- En este caso, al aplicar el 90 % de las cargas extremas, la energía cinética comienza a crecer de manera no despreciable. El fallo ha tenido lugar y se desencadena el proceso de colapso.
- Se requieren análisis de sensibilidad para tener confianza en el instante de fallo.



5. Conclusiones y recomendaciones

- El paso de tiempo estable de la integración es aproximadamente proporcional al tamaño de los elementos.
- El tamaño de elemento más pequeño es condicionante. En problemas explícitos las mallas suelen ser más uniformes que en los implícitos.
- El paso de tiempo se ve reducido aún más por la presencia de amortiguamientos. El amortiguamiento de Rayleigh proporcional a la rigidez puede ser muy condicionante.

- El escalado de masa en problemas cuasiestáticos suele ser preferible frente a acelerar la física. Conviene hacer comprobaciones energéticas y estudios de sensibilidad.



Encuentros con un experto

Javier Rodríguez y Joaquín Martí

PREGUNTAS y RESPUESTAS

Incremento de Tiempo Estable y
Escalado de Masa en Análisis Explícitos

Un serie de seminarios organizados por NAFEMS Iberia