



Encuentros con un experto

Gino Duffett

Consultor I+D y Formación

NAFEMS y Herbertus SL

El cálculo de tensión en el MEF y su precisión

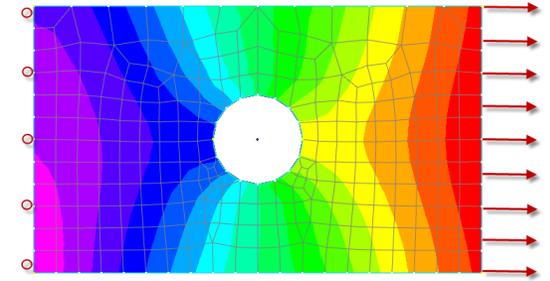
Un serie de seminarios organizados por NAFEMS Iberia



Índice

- Una solución válida
- Cálculo de tensiones
- ¿Por qué utilizamos los puntos de Gauss?
- (Integración numérica)
- Estimación del error en el MEF
- Preguntas y Respuestas

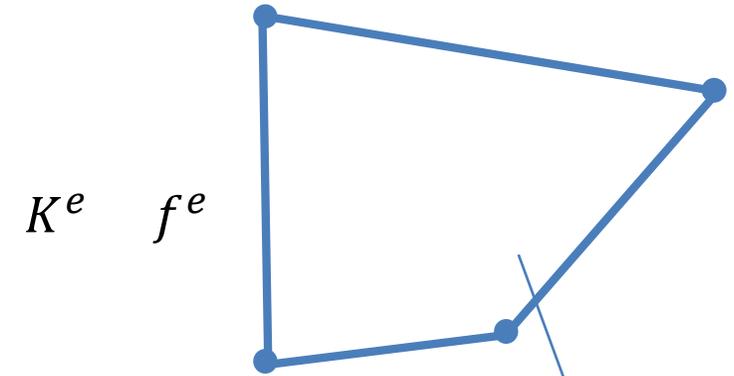
Una solución válida



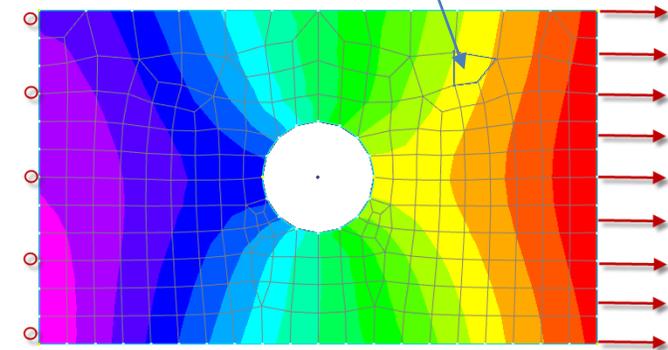
- Equilibrio general (la aproximación MEF)
 - Cálculo de los desplazamientos definidos en los nodos
- Compatibilidad (deformación-desplazamiento)
 - Cálculo de las 6 deformaciones a partir de los 3 desplazamientos
 - La compatibilidad está satisfecha porque los desplazamientos son continuos en la malla
- Ecuaciones constitutivas (material, tensión-deformación)
 - Cálculo de tensiones a partir de las deformaciones
 - Los valores en los nodos indican el error en la aproximación MEF

Cálculo global

- Para cada elemento se calcula
 - matrices de rigidez
 - vectores de fuerza
 - condiciones de contorno
- Se combina todos en el sistema global de ecuaciones



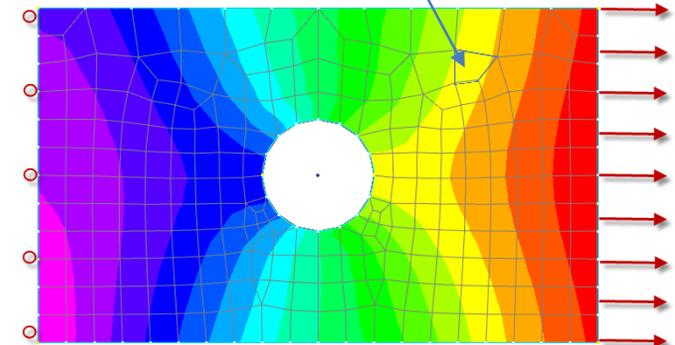
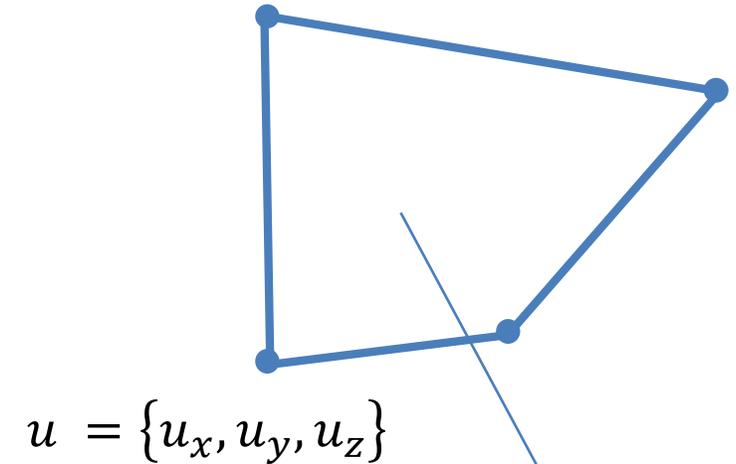
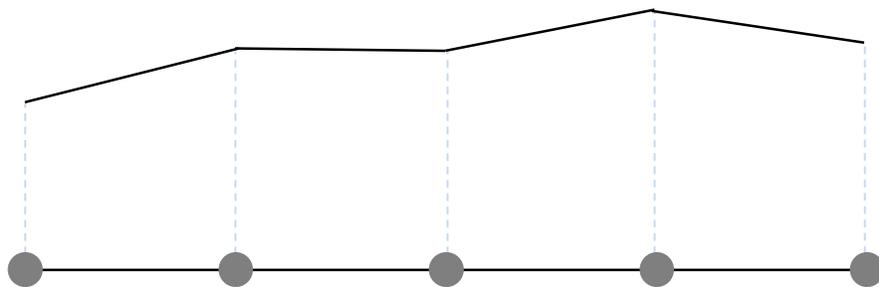
$$[K]\{u\} = \{f\} \quad [K] = \sum_i [K]_i^e \quad \{f\} = \sum_i \{f\}_i^e$$



- La solución (lineal) de esta sistema de ecuaciones da los valores de los **grados de libertad** (dofs)

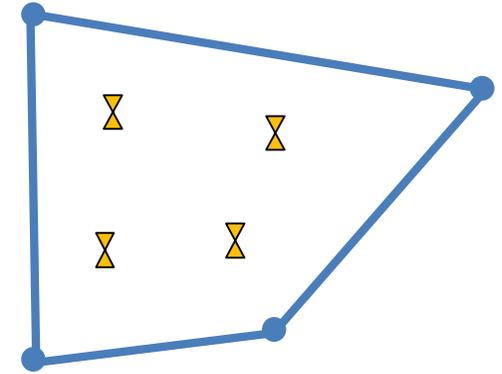
Cálculo de los desplazamientos (global)

- Así conocemos los desplazamientos (y/o rotaciones) en todos los nodos
 - continuo por partes en toda la malla
 - mismo valor al nodo
 - diferentes pendientes en los elementos conectados



Tensiones y Deformaciones (elemento)

- Se calcula deformaciones y tensiones al nivel de elemento
 - a los **puntos de Gauss*** (mas adelante)
 - precisos, porque son los puntos utilizados en **la integración de la rigidez del elemento*** (mas adelante)



- El número de tensiones depende del tipo de elemento

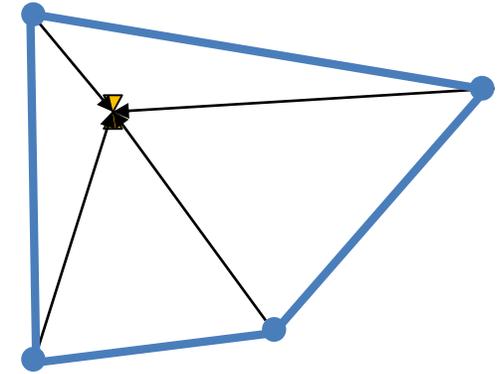
– 1D	$\{\sigma\}$	$\{\varepsilon\}$		
– 2D	$\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}$	$\{\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta\theta}\}$	$\{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}\}$	$\{\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{\theta\theta}\}$
– 3D	$\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}$	$\{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}\}$		

Cálculo de deformación (elemento)

- Extraer los desplazamientos del elemento

$\{u^e\}$ 3D, 3 desplazamientos por cada nodo
(elemento QUAD4: son $2 \cdot 4 = 8$)
(elemento HEX8: son $3 \cdot 8 = 24$)

$$\{u_{(x,y,z)}\} = [N]\{u^e\}$$



- Interpolar, utilizando las **funciones de forma** (shape functions) para calcular las deformaciones en cada punto de Gauss
 - las relaciones deformación-desplazamiento incluyen derivados de desplazamientos utilizando las funciones de forma

$$\{\varepsilon_{(x,y,z)}\} = [B]\{u^e\}$$

3D, 6 deformaciones por cada punto

Cálculo de deformación (elemento)

- Ejemplo:
en 3D las relaciones deformación-desplazamiento a cualquier punto en el elemento (versión lineal)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial X} & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X} \right) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial Y} & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial Z} + \frac{\partial u_z}{\partial X} \right) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial Z} & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial Z} + \frac{\partial u_z}{\partial Y} \right) \end{aligned}$$

$$\{\varepsilon_{(x,y,z)}\} = [B]\{u^e\}$$

3D, 6 deformaciones por cada punto

Cálculo de tensión (elemento)

- A partir de la deformación en cada punto de Gauss $\{\varepsilon_{(x,y,z)}\}$
- Utilizando la relación constitutiva (cualquier) se calcula la tensión en cada punto de Gauss

$$\{\sigma_{(x,y,z)}\} = [D]\{\varepsilon_{(x,y,z)}\}$$

Por ejemplo, la Ley de Hooke, en 1D

$$\sigma = E\varepsilon$$

3D, 6 tensiones por cada punto

Por ejemplo, la Ley de Hooke, en 3D

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}$$

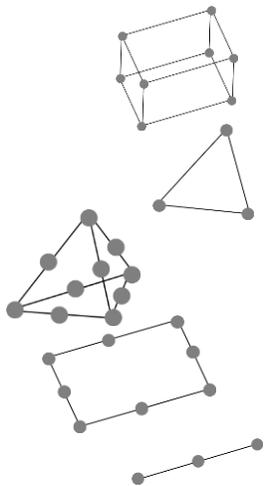


Pero...

- ¿Qué es la precisión?
- ¿Qué tipo de tensiones?
- ¿Porqué hay los puntos de Gauss?

¿Qué es la precisión?

- El grado de los desplazamientos en el elemento = grado de las funciones de forma $\{u_{(x,y,z)}\} = [N]\{u^e\}$ (implícito por el nombre del elemento y el número de nodos)



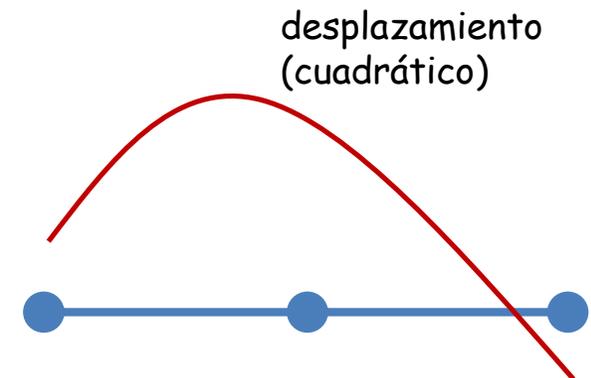
HEX8 - 3D, 8 nodos, 2 de cada lado ... lineal

TRI3 - 2D, 3 nodos, 2 de cada lado ... lineal

TET10 - 3D, 10 nodos, 3 de cada lado ... cuadrático

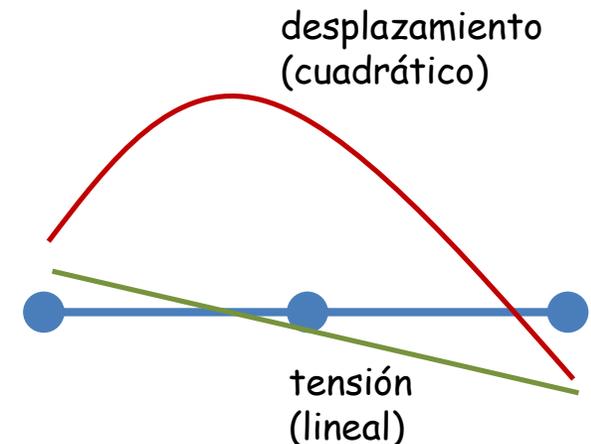
QUAD8 - 2D, 8 nodos, 3 de cada lado ... cuadrático

BAR3 - 1D, 3 nodos, 3 de cada lado ... cuadrático



¿Qué es la precisión?

- El grado de los desplazamientos en el elemento
= grado de las funciones de forma $\{u_{(x,y,z)}\} = [N]\{u^e\}$
(implícito por el nombre del elemento y el numero de nodos)
- El grado de las deformaciones $\{\varepsilon_{(x,y,z)}\} = [B]\{u^e\}$
= un grado menos de las funciones de forma
(existe un derivado de las funciones de forma)
- El grado de las tensiones $\{\sigma_{(x,y,z)}\} = [D]\{\varepsilon_{(x,y,z)}\}$
= el grado de la deformaciones



¿Qué tipo de tensiones?

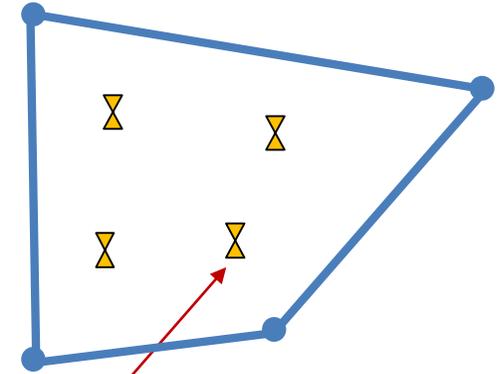
- Tensión direccional $\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz}\}^T$
 - Cartesiana, cilíndrica, esférica, etc.
- Tensiones principales $\{\sigma_{principal}\} = \{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3\}^T \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$
- von Mises $\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$
 - un valor escalar como un "tamaño" de tensión
 - criterio de falla para metales dúctiles
- Cortante máxima $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$
- Otras...

Los ejemplos son correctos para tensiones en 3D

¿Porqué hay los puntos de Gauss?

- En general la rigidez del elemento se calcula utilizando integración

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$



- Integración numérica

– Convierte la integración del cálculo en una suma

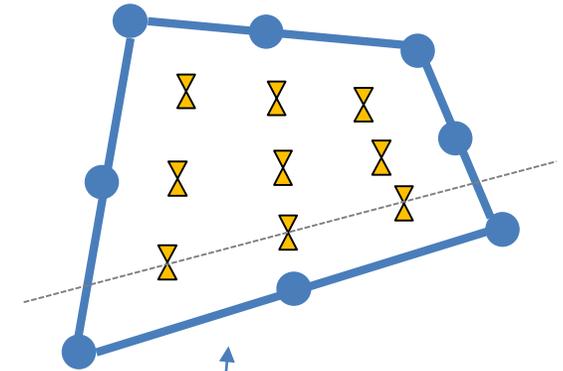
$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \cong \sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i ([B]^T [D] [B])_i$$

numero de puntos de Gauss

factor (peso)

- Gauss

- N_G puntos para integrar polinomios de mayor grado $(2N_G - 1)$
- puntos situados en posiciones interiores, espaciado alrededor del centro del intervalo



N_G	mayor orden	en 2D N_G	en 3D N_G
1	1	1	1
2	3	2x2	2x2x2
3	5	3x3	3x3x3

$N_G = 3:$

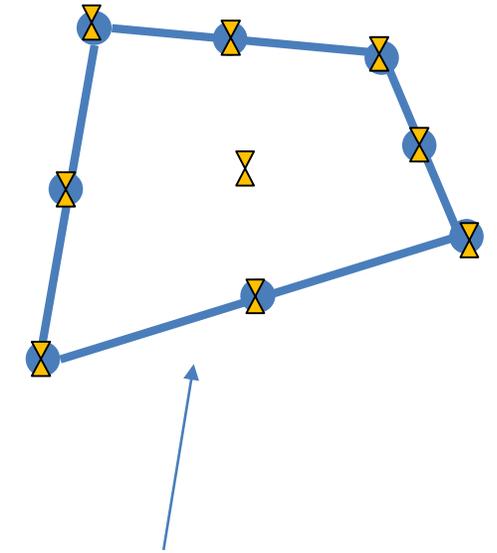
$$x_1 = -0,774597 \quad \alpha_1 = 0,555556$$

$$x_2 = 0 \quad \alpha_2 = 0,888889$$

$$x_3 = +0,774597 \quad \alpha_3 = 0,555556$$

- Newton-Cotes

- N_{NC} puntos para integrar polinomios de mayor grado ($N_{NC} - 1$)
- puntos situados en posiciones equidistantes, de extremo a extremo



$N_{NC} = 3:$

$x_1 = -1,0$	$\alpha_1 = 0,166667$
$x_2 = 0$	$\alpha_2 = 0,666667$
$x_3 = +1,0$	$\alpha_3 = 0,166667$

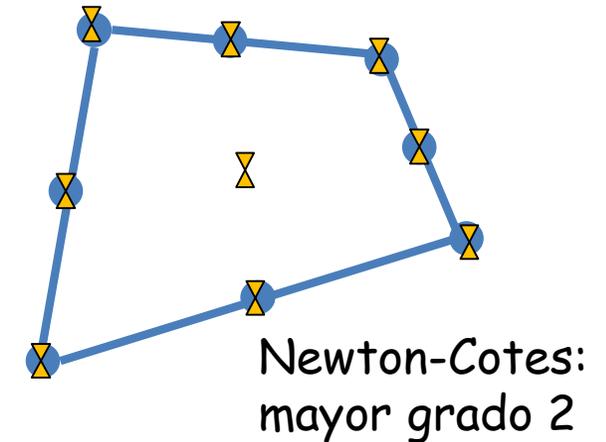
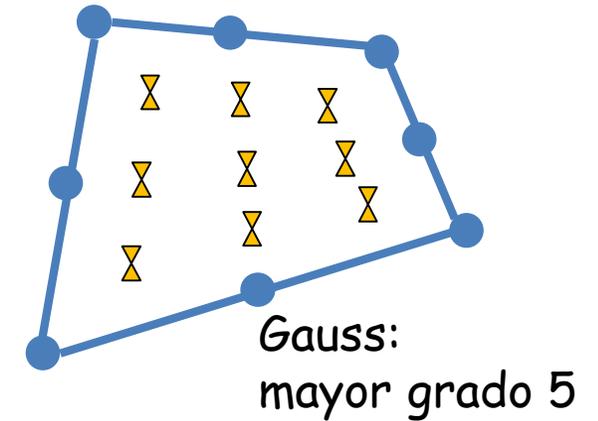
N_{NC}	mayor orden	en 2D	en 3D
2	1	2x2	2x2x2
4	3	4x4	4x4x4
6	5	6x6	6x6x6

- Gauss v Newton-Cotes
 - menos puntos para integrar polinomios del mismo grado ($2N_G = N_{NC}$)
 - mas complejo para definir las posiciones de los puntos (pero solo se programa una vez)

N_G	N_{NC}	mayor grado	en 2D		en 3D	
			N_G^{total}	N_{NC}^{total}	N_G^{total}	N_{NC}^{total}
1	2	1	1	4	1	8
2	4	3	4	16	8	64
3	6	5	9	36	27	216

8 veces mas

4 veces mas



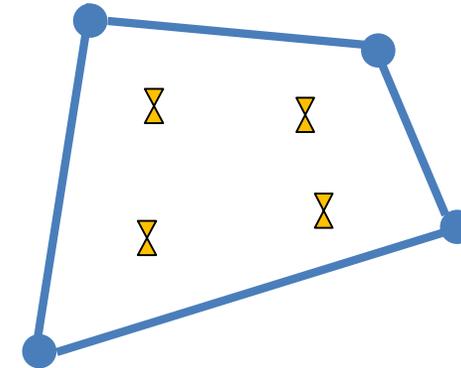
– Reducción del tiempo de cálculo

Integración Gauss

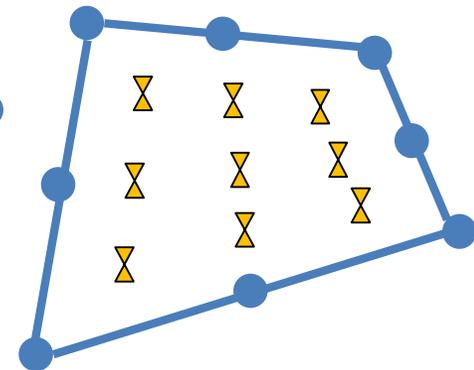
(...)

- Integración 'teórica'
 - Elementos lineales 1D, 2D and 3D
 - 2 puntos en cada dirección
 - Elementos cuadráticos 1D, 2D and 3D
 - 3 puntos en cada dirección
- Integración reducida
 - 1 punto menos en cada dirección
 - Más reducción del tiempo de cálculo

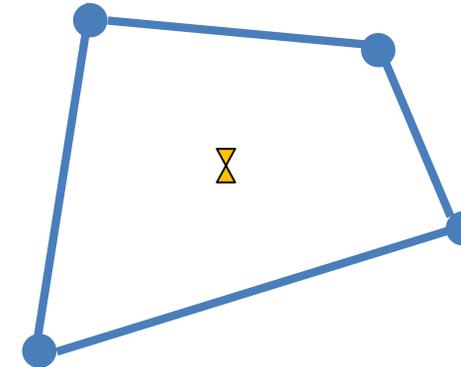
elemento lineal



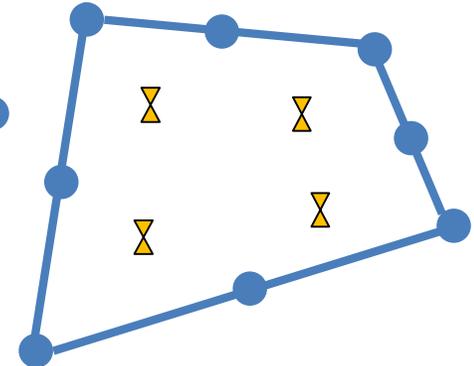
elemento cuadrático



elemento lineal



elemento cuadrático

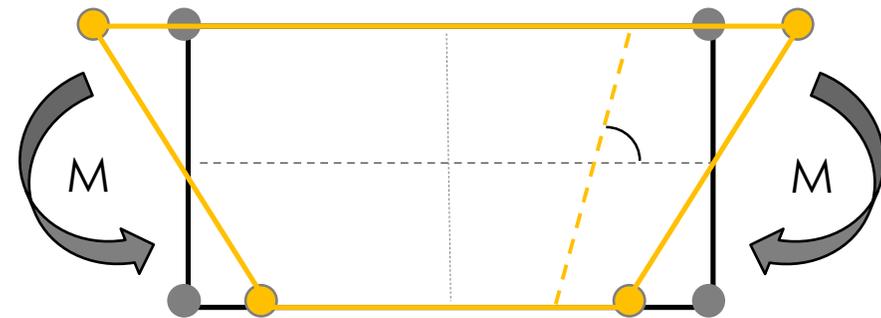
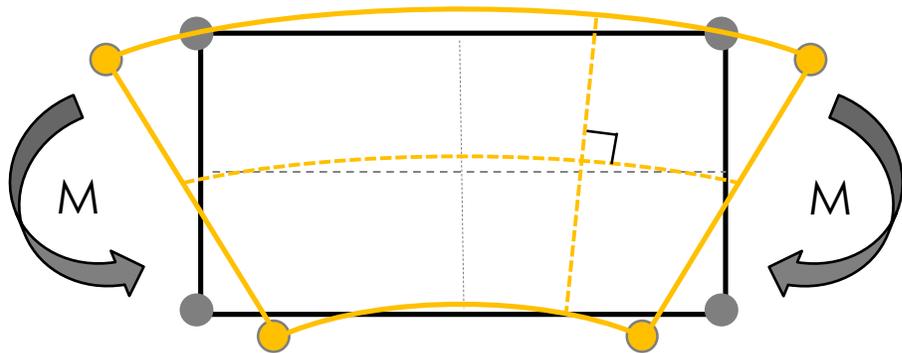
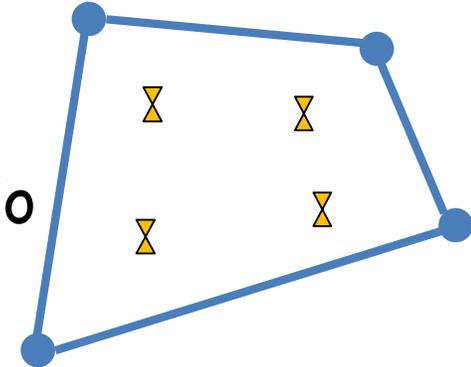


Pero, ¿todo es correcto?

- Problemas con elementos lineales 2D and 3D

- bloqueo de corte: (shear locking)
elementos son demasiados rígidos en problemas de doblado

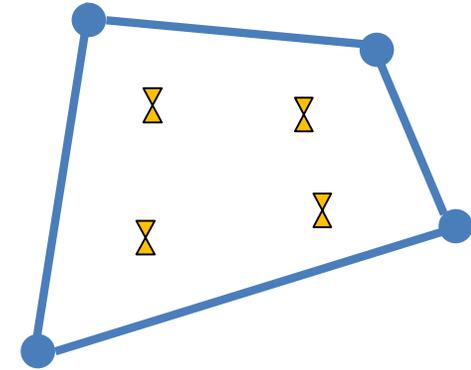
- bloqueo volumétrico: (volumetric locking)
elementos son demasiados rígidos para materiales incompresibles



bloqueo de corte

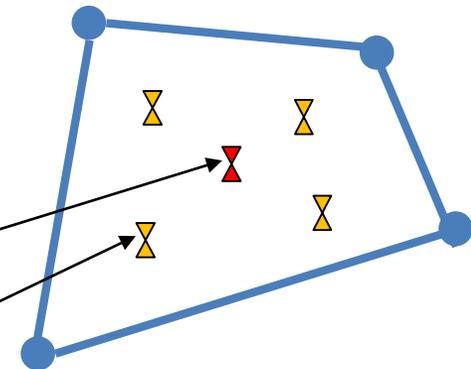
- Soluciones

- Malla mas fina
- Elementos con integración reducida
- Elementos cuadráticos
- Integración reducida *selectiva* (Selective Reduced Integration)
 - integración diferente para los componentes desviadores y los componentes volumétricos (hidrostáticos)
- Otros controles que contiene el software



Punto de Gauss, hidrostático (1)

Puntos de Gauss, desviadores (4)



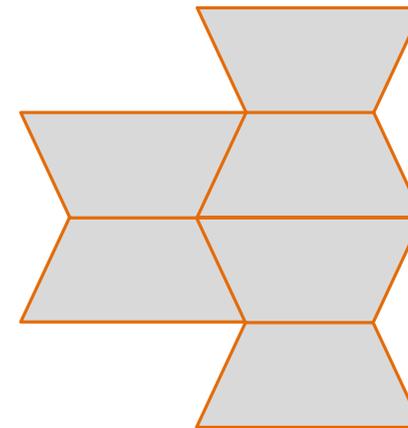
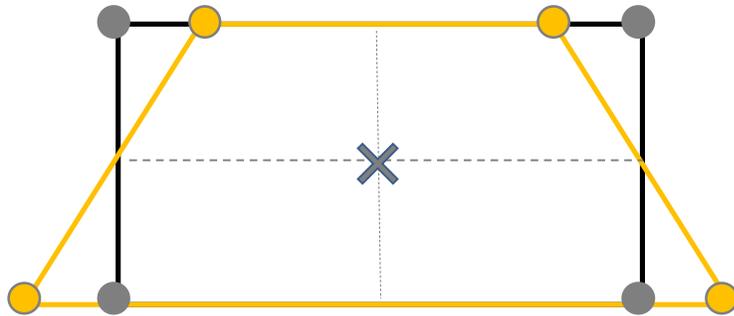
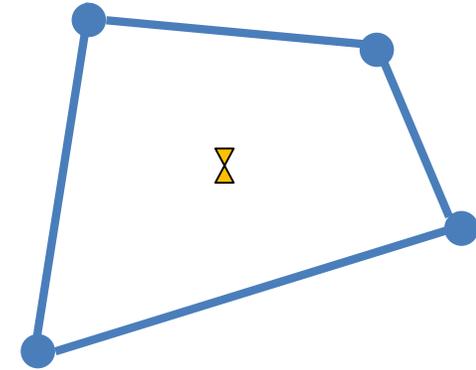
- Problemas con elementos lineales 2D and 3D

- efecto de reloj de arena:

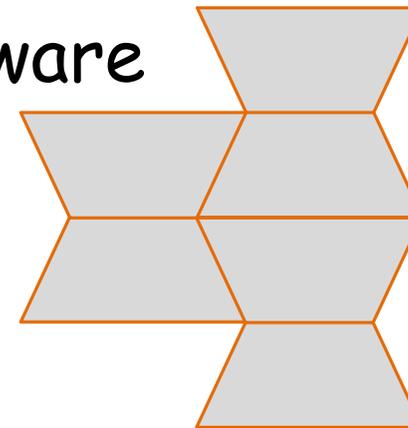
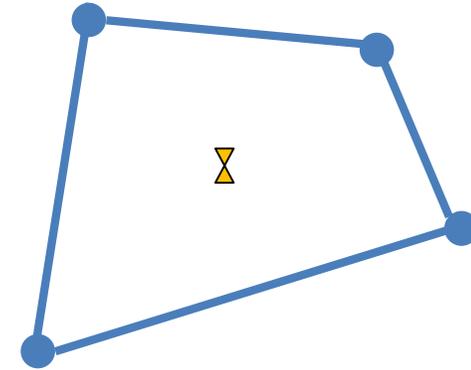
(hourglassing)

- desplazamientos que producen cero deformación, cero energía ni cambio de volumen en la malla

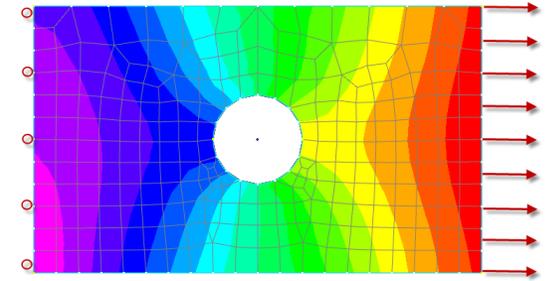
- son estados matemáticos estables pero no físicamente posibles



- Soluciones
 - Malla mas fina
 - No aplicar cargas ni restricciones en un solo nodo
 - Elementos con integración 'teórica' o integración reducida selectiva
 - Elementos cuadráticos
 - Otros controles que contiene el software
 - Flanagan & Belytschko



Recuerda...



- Cálculo de los desplazamientos
 - En los nodos (nivel global)
- Cálculo de las deformaciones a partir de los desplazamientos
 - En los puntos de Gauss (elemento)
- Cálculo de tensiones a partir de las deformaciones
 - En los puntos de Gauss (elemento)
 - En los nodos para obtener una indicación del error en la aproximación MEF

$$[K]\{u\} = \{f\}$$

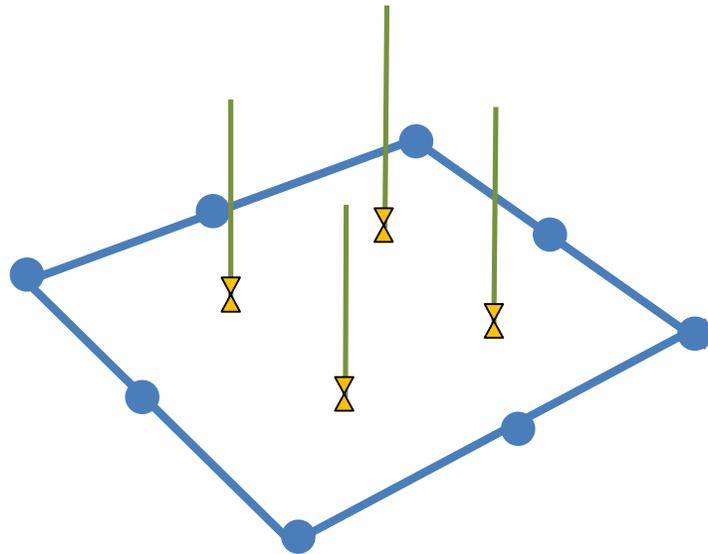
$$\{\varepsilon_{(x,y,z)}\} = [B]\{u^e\}$$

$$\{\sigma_{(x,y,z)}\} = [D]\{\varepsilon_{(x,y,z)}\}$$

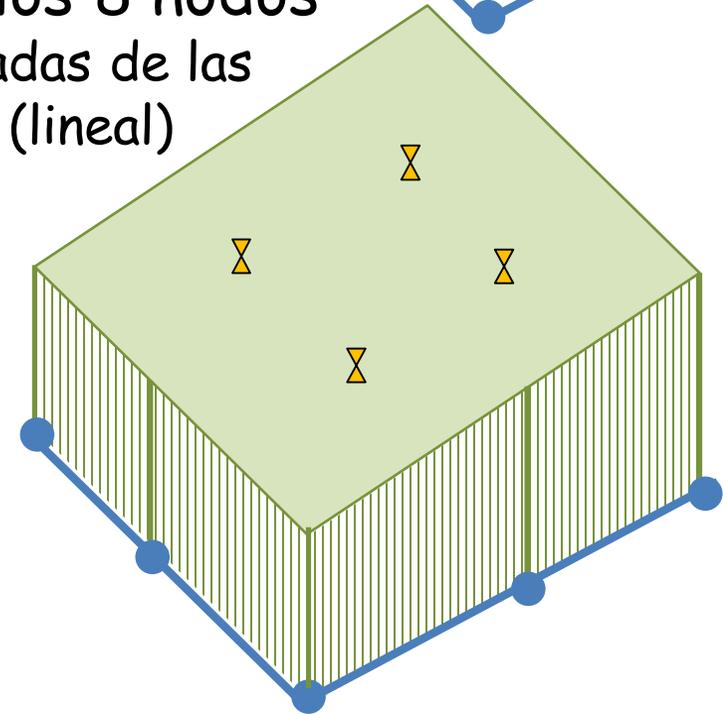
Calculo de tensión en los nodos

- Elemento cuadrático con integración Gauss 2x2

1 4 tensiones en los puntos de Gauss con valores diferentes

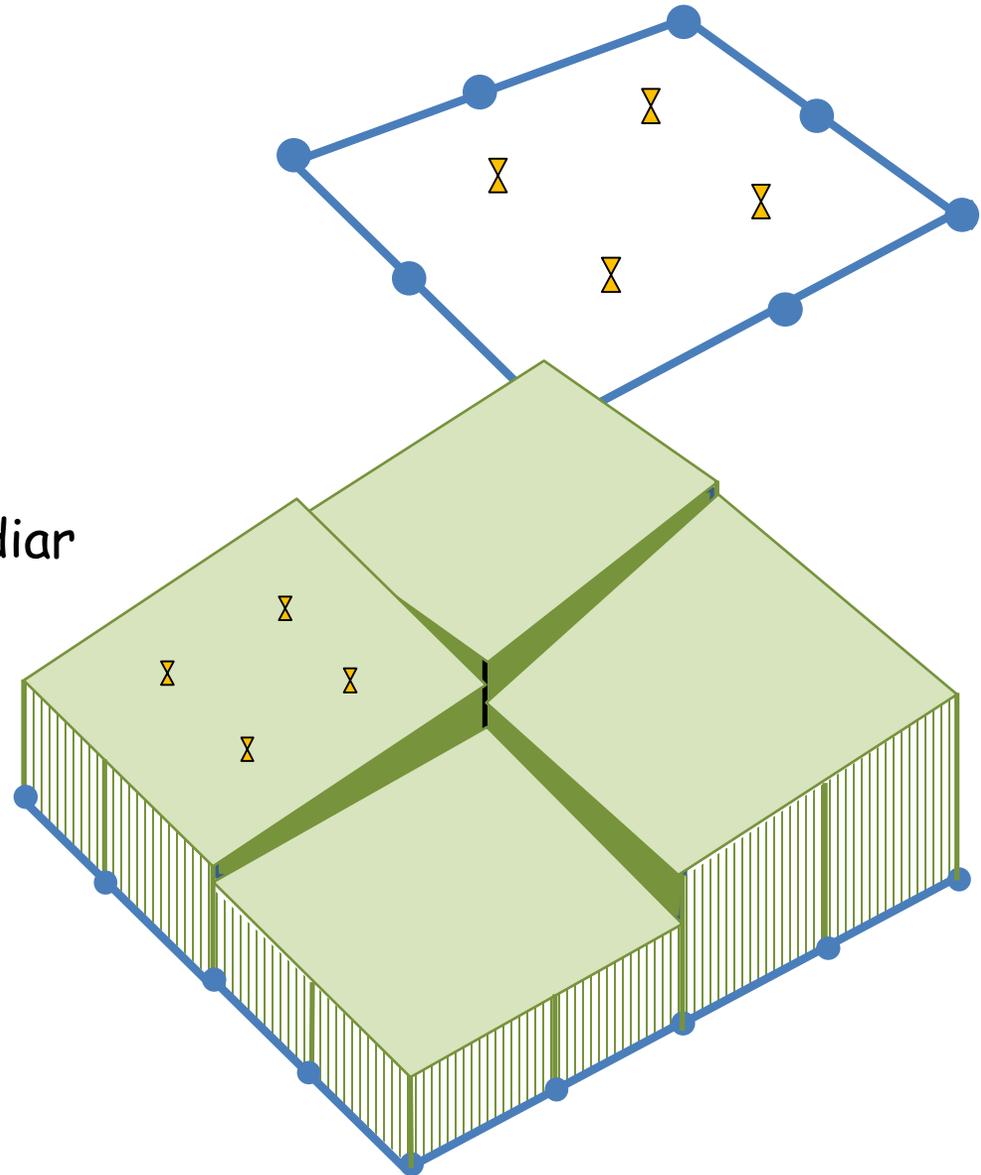


2 Extrapolación a los 8 nodos utilizando las derivadas de las funciones de forma (lineal)



Tensiones de elementos en los nodos

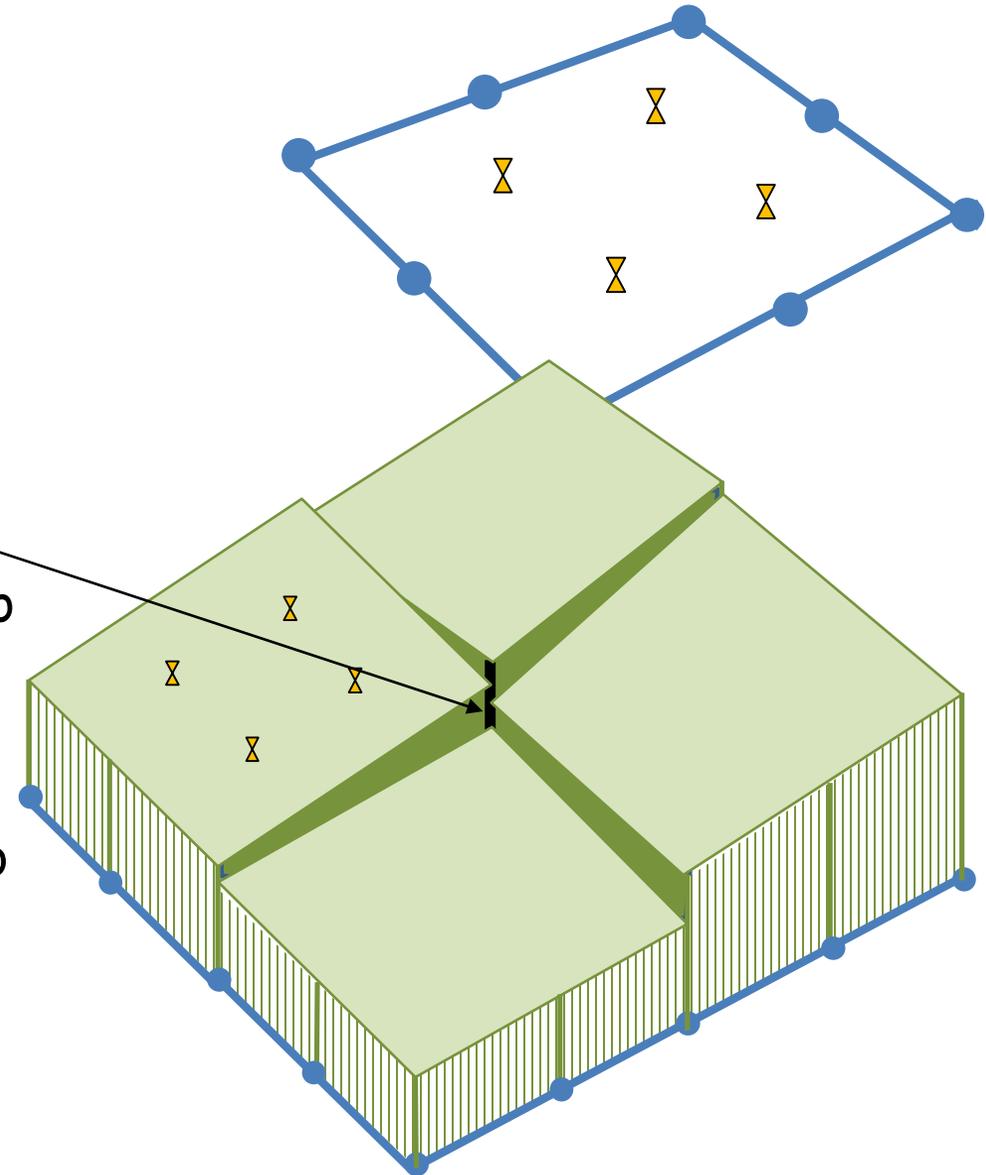
- Elemento cuadrático con integración Gauss 2x2
- ③ 4 tensiones diferentes en el nodo común entre los elementos
 - tensiones de elementos o tensiones sin promediar
 - no son continuos por la malla porque se calcula elemento por elemento



Estimación del error, tensiones precisas

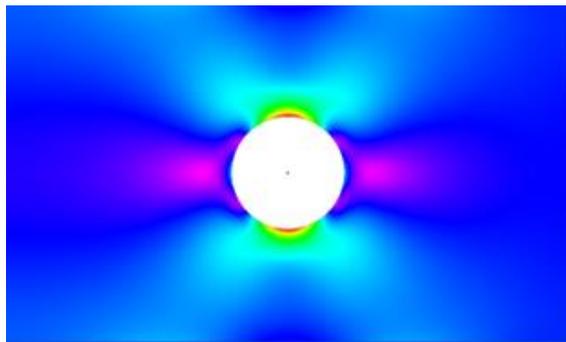
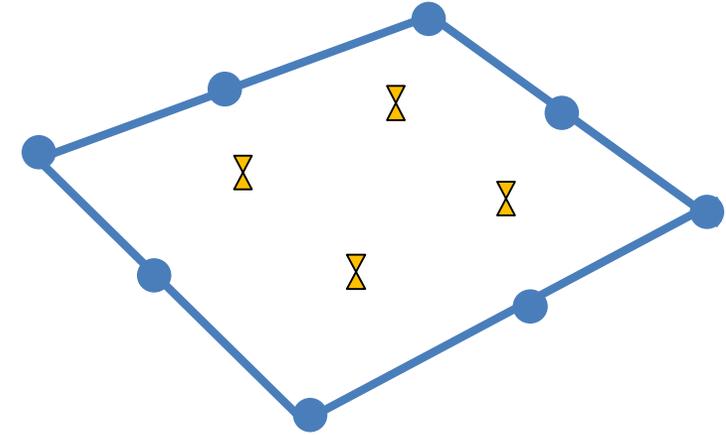
- Elemento cuadrático con integración Gauss 2x2

- 4 La estimación del error en la aproximación MEF
- diferencia máxima
 - diferencia máxima dividido por el valor máximo
 - diferencia máxima dividido por el valor del promedio
 - diferencia máxima normalizada
 - diferencia entre el valor máximo y el promedio
 - otro que contiene el software

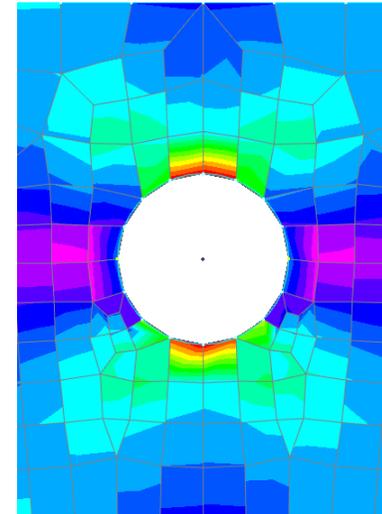


Promedio de las tensiones en los nodos

- Elemento cuadrático con integración Gauss 2x2
- 5 El promedio de las tensiones en el nodo
- promedio de las tensiones en los nodos
 - utilizadas para generar gráficos de contorno suave



promedio de las tensiones (en los nodos) para utilizar en informes y mostrar a clientes



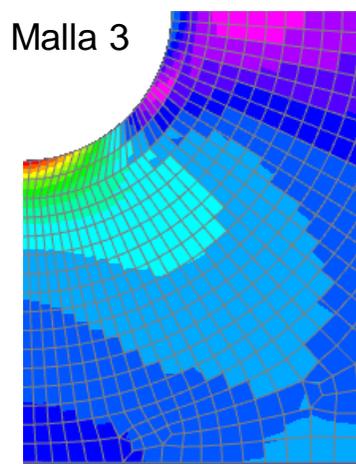
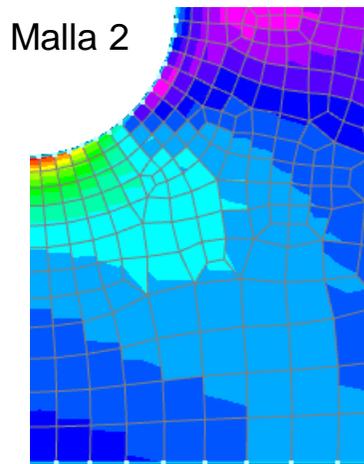
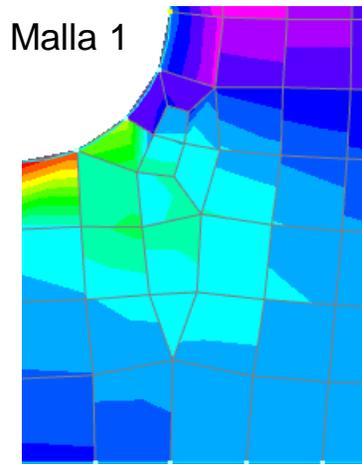
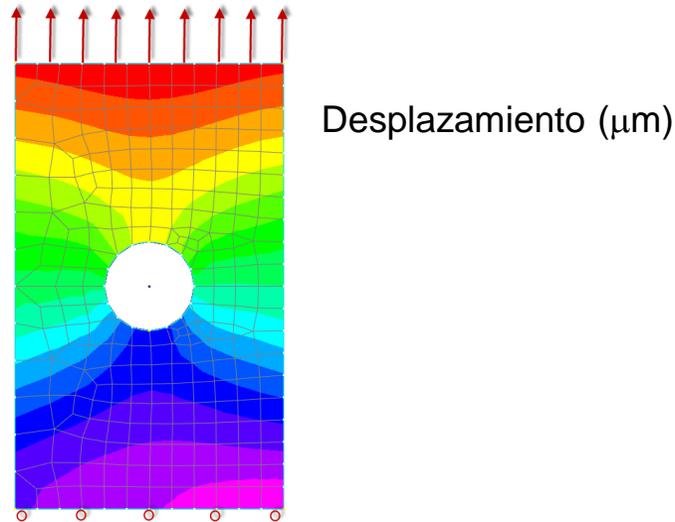
tensiones de elemento (en los nodos o preferiblemente en los puntos de Gauss) para tomar decisiones de ingeniera

Solución correcta 1 de 2

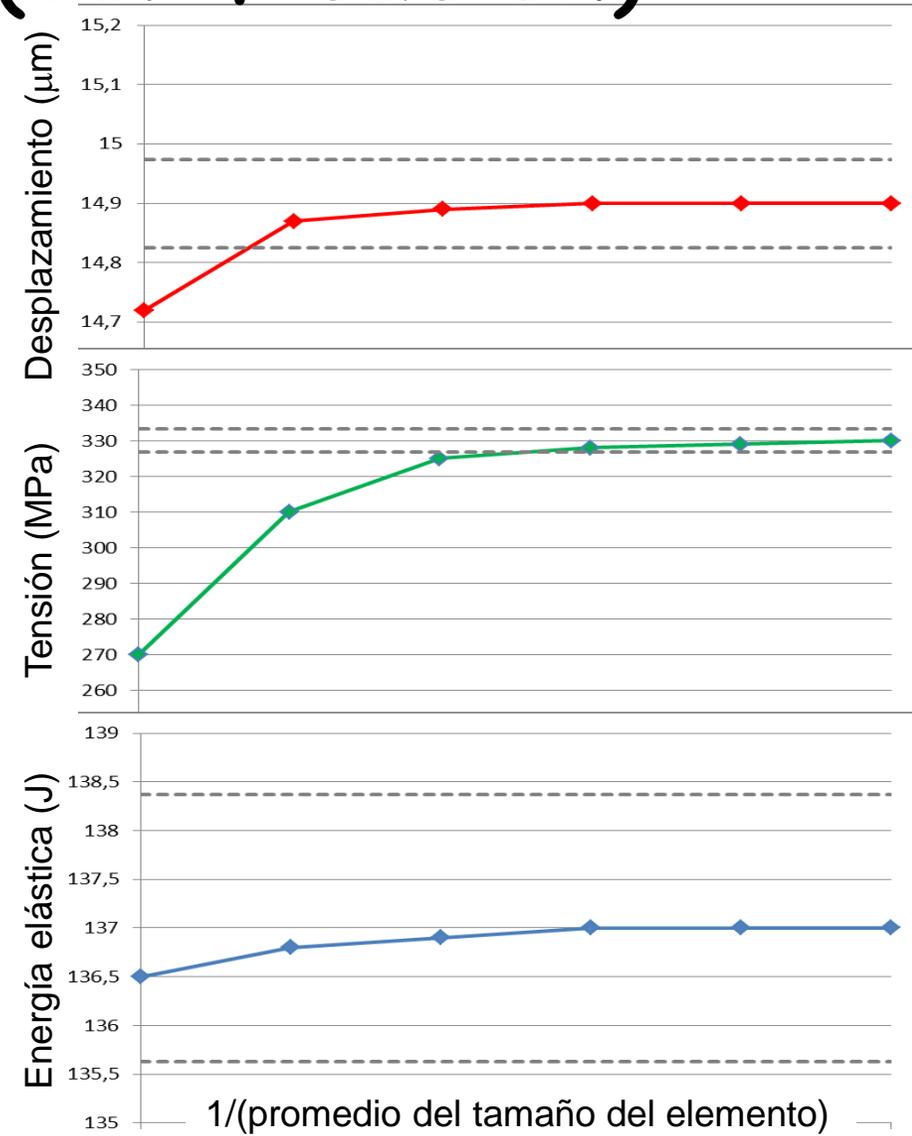
- Para obtener la mejor solución se necesita hacer una **convergencia de malla (verificación)**
 - Repetir la simulación con una malla mas fina (en las zonas adecuadas) hasta que los resultados sean estables
 - Los desplazamientos convergen mas rápidos que las tensiones (hay un grado de diferencia)
 - Examinar las tensiones de elemento en los nodos situadas en las zonas de alta tensión
 - Normalmente se crea un gráfico (pe. tensión en un nodo)
 - Algunos softwares contienen herramientas para hacer esto

Convergencia de malla (verificación)

Ejemplo

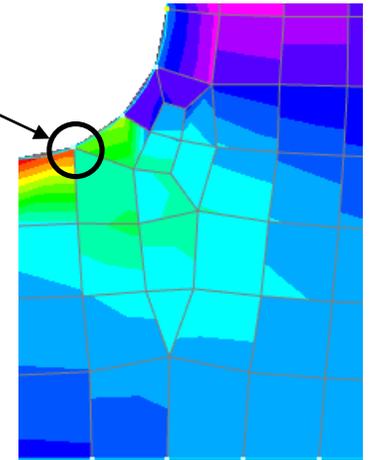


Tensión de elemento (MPa)



Solución correcta 2 de 2

- ¿Falta de tiempo?
 - Examinar las tensiones de elemento en los nodos
 - Extraer o calcular el error máximo
 - diferencia máxima
 - diferencia máxima dividido por el valor máximo
 - diferencia máxima dividido por el valor del promedio
 - diferencia máxima normalizada
 - diferencia entre el valor máximo y el promedio
 - otro que contiene el software



El cálculo de tensión en el MEF y su precisión

Preguntas?
Dudas?
Comentarios?

Gino Duffett

gino.duffett@nafems.org
gduffett@herbertus.com

